ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN

TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

NGUYỄN THỊ QUẾ

BÀI TOÁN CỰC TRỊ VỚI ĐIỀU KIỆN RÀNG BUỘC BẤT ĐẲNG THỨC, HỆ BẤT ĐẲNG THỨC

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

THÁI NGUYÊN - 2017

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

NGUYỄN THỊ QUẾ

BÀI TOÁN CỰC TRỊ VỚI ĐIỀU KIỆN RÀNG BUỘC BẤT ĐẲNG THỨC, HỆ BẤT ĐẲNG THỨC

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

Chuyên ngành: Phương pháp Toán sơ cấp
Mã số: 60 46 01 13

NGƯỜI HƯỚNG DẪN KHOA HỌC
PGS.TS. TRỊNH THANH HẢI

THÁI NGUYÊN - 2017

Mục lục

Mở đầu **1**

1 Kiến thức chuẩn bị **3**

1.1 Bài toán cực trị với điều kiện ràng buộc bất đẳng thức, hệ bất đẳng thức 3

1.2 Một số bất đẳng thức cơ bản 4

2 Một số hướng giải bài toán cực trị với điều kiện ràng buộc bất đẳng thức, hệ bất đẳng thức **17**

2.1 Vận dụng các bất đẳng thức cơ bản 17

2.2 Sử dụng giảm số biến của biểu thức 33

2.3 Vận dụng tính chất của tam thức bậc hai 44

2.4 Vận dụng tính chất của hàm số 47

2.5 Vận dụng tính chất của hình học 55

Kết luận **59**

Tài liệu tham khảo **60**

Mở đầu

Nhiều năm gần đây trong các kỳ thi học sinh giỏi các cấp, các kì thi Olympic trong nước và quốc tế thường có các bài toán yêu cầu tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của một biểu thức hay của một hàm số nào đó. Các bài toán này là một phần của các bài toán cực trị đại số.

Các bài toán cực trị rất phong phú và đa dạng, nó tương đối mới và khó đối với học sinh. Để giải các bài toán cực trị học sinh phải biết biến đổi tương đương các biểu thức đại số, sử dụng khá nhiều các hằng đẳng thức, bất đẳng thức từ đơn giản tới phức tạp, phải tổng hợp các kiến thức và kỹ năng tính toán, tư duy sáng tạo và đặc biệt phải nắm được các bất đẳng thức cơ bản trong chương trình phổ thông.

Luận văn nhằm mục đích tổng hợp các bất đẳng thức cơ bản, đặc biệt đi sâu tìm lời giải các bài toán cực trị với điều kiện ràng buộc là bất đẳng thức, hệ bất đẳng thức trong các đề thi học sinh giỏi trong nước và quốc tế.

Nhiệm vụ của luận văn: Đọc các tài liệu, các đề thi IMO, VMO, đề thi học sinh giỏi vùng Đông Âu, đề thi học sinh giỏi vùng Châu Á, Thái Bình Dương,... để chọn lọc ra các bài toán cực trị với điều kiện ràng buộc bất đẳng thức, hệ bất đẳng thức tiêu biểu. Tổng hợp, phân loại phương pháp giải bài toán theo cách tiếp cận để người đọc có thể nhận dạng và vận dụng các phương pháp này vào giải quyết các bài toán cực trị tương tự.

Chương 1. Kiến thức chuẩn bị

Trong chương này, luận văn trình bày khái niệm cơ bản về bài toán cực trị với điều kiện ràng buộc bất đẳng thức, hệ bất đẳng thức, một số bất đẳng thức cơ bản vận dụng trong việc giải các bài toán cực trị.

Chương 2. Một số hướng giải bài toán cực trị với điều kiện ràng

buộc bất đẳng thức, hệ bất đẳng thức

Chương này trình bày một số phương pháp giải bài toán cực trị với điều kiện ràng buộc bất đẳng thức, hệ bất đẳng thức như phương pháp vận dụng các bất đẳng thức cơ bản, phương pháp sử dụng giảm số biến của biểu thức, phương pháp vận dụng tính chất của tam thức bậc hai, phương pháp vận dụng tính chất của hàm số, phương pháp vận dụng tính chất của hình học.

Mặc dù bản thân đã có những cố gắng vượt bậc, nhưng không tránh khỏi những khiếm khuyết, rất mong sự góp ý của quý thầy cô và những bạn đọc quan tâm để luận văn được hoàn thiện hơn.

Luận văn được hoàn thành tại trường Đại học Khoa học - Đại học Thái Nguyên với sự hướng dẫn của PGS.TS. Trịnh Thanh Hải. Tôi xin được bày tỏ lòng biết ơn sâu sắc đối với sự quan tâm, hướng dẫn của thầy, tới các thầy cô trong Ban giám hiệu, Phòng đào tạo và Khoa Toán - Tin của trường Đại học Khoa học, các bạn học viên lớp Cao học Toán K9C đã giúp đỡ, tạo điều kiện thuận lợi và động viên tôi trong quá trình học tập và nghiên cứu tại trường.

Thái Nguyên, ngày 19 tháng 4 năm 2017.

Học viên

Nguyễn Thị Quế

Chương 1

Kiến thức chuẩn bị

Trong chương này, luận văn trình bày khái niệm cơ bản về bài toán cực trị với điều kiện ràng buộc bất đẳng thức, hệ bất đẳng thức, một số bất đẳng thức cơ bản vận dụng trong việc giải các bài toán cực trị. Nội dung chương chủ yếu lấy từ các tài liệu [3], [6], [8].

1.1 Bài toán cực trị với điều kiện ràng buộc bất đẳng thức, hệ bất đẳng thức

Bài toán cực trị với điều kiện ràng buộc bất đẳng thức, hệ bất đẳng thức là dạng bài toán: Cho biểu thức $F(x_1, x_2, ..., x_n)$ với các biến $x_1, x_2, ..., x_n$ thỏa mãn điều kiện D (D có thể là một bất đẳng thức, một hệ bất đẳng thức, ...). Ta nói M (M phải là hằng số) là giá trị lớn nhất (giá trị nhỏ nhất) của biểu thức F khi và chỉ khi nó thỏa mãn hai điều kiện sau:

+) Bất đẳng thức $F(x_1, x_2, ..., x_n) \leq M (F(x_1, x_2, ..., x_n) \geq M)$ đúng với mọi $x_1, x_2, ..., x_n$ thỏa mãn D.

+) Tồn tại $x_1, x_2, ..., x_n$ thỏa mãn D sao cho $F(x_1, x_2, ..., x_n) = M$.

Ví dụ 1.1 (Đề thi chọn đội tuyển Việt Nam dự thi IMO 1994)**.** Xét các bộ số thực a, b, c, d thỏa mãn điều kiện

$$\frac{1}{2} \leq a^2 + b^2 + c^2 + d^2 \leq 1.$$

Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$Q = (a - 2b + c)^2 + (b - 2c + d)^2 + (b - 2a)^2 + (c - 2d)^2.$$

Ví dụ 1.2 (Đề thi chọn đội tuyển Quốc gia 2011)**.** Xét các số thực a, b, c thỏa mãn

$$21ab + 2bc + 8ac \leq 12.$$

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P(a, b, c) = \frac{1}{a} + \frac{2}{b} + \frac{3}{c}.$$

Ví dụ 1.3 (Đề thi Olympic 30/4 - Sở giáo dục đào tạo Bình Định)**.** Cho ba số thực dương x, y, z thỏa mãn

$$\begin{cases} 1 \leq z \leq min\left\{x, y\right\} \\ xz \geq 3 \\ yz \geq 2 \end{cases}$$

Tìm giá trị lớn nhất của

$$P(x, y, z) = \frac{30}{x} + \frac{4}{y} + \frac{2010}{z}.$$

1.2 Một số bất đẳng thức cơ bản

1.2.1. Bất đẳng thức AM-GM

Định lý 1.1. Giả sử $a_1, a_2, ..., a_n$ là các số thực không âm. Khi đó

$$\frac{a_1 + a_2 + ... + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1a_2...a_n}.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a_1 = a_2 = ... = a_n$.

Hệ quả 1.1. Với mọi bộ số dương $a_1, a_2, ..., a_n$ ta có

$$\sqrt[n]{a_1a_2...a_n} \geq \frac{n}{\dfrac{1}{a_1} + \dfrac{1}{a_2} + ... + \dfrac{1}{a_n}}.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a_1 = a_2 = ... = a_n$.

Hệ quả 1.2. Với mọi bộ số dương $a_1, a_2, ..., a_n$ ta có

$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + ... + \frac{1}{a_n} \geq \frac{n^2}{a_1 + a_2 + ... + a_n}.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a_1 = a_2 = ... = a_n$.

Hệ quả 1.3. Với mọi bộ số không âm $a_1, a_2, ..., a_n$ và $m = 1, 2, ...$ ta có

$$\frac{a_1^m + a_2^m + ... + a_n^m}{n} \geq \left(\frac{a_1 + a_2 + ... + a_n}{n}\right)^m.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a_1 = a_2 = ... = a_n$.

Ví dụ 1.4 (xem [3])**.** Cho các số dương $a, b, c \geq 1$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$P = \frac{a}{a^2 + b^2} + \frac{b}{b^2 + c^2} + \frac{c}{c^2 + a^2} + \sqrt{\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}}.$$

Phân tích.

Trong biểu thức P ta nhận thấy rằng biểu thức $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$ nằm trong căn thức, vì vậy ta hoàn toàn có thể mạnh dạn suy nghĩ đến việc cần tìm một bất đẳng thức phụ sao cho có thể đưa ra được một đánh giá

$$\frac{a}{a^2 + b^2} + \frac{b}{b^2 + c^2} + \frac{c}{c^2 + a^2} \leq f(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c})$$

trong đó $f(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c})$ là một biểu thức có chứa $(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c})$.

Bài toán đang cần tìm giá trị lớn nhất vì thế ta nghĩ tới chiều đánh giá $P \leq$, khi đó ta cần sử dụng $a^2 + b^2 \geq, b^2 + c^2 \geq, c^2 + a^2 \geq$. Điều này làm ta suy nghĩ tới việc sử dụng bất đẳng thức quen thuộc AM-GM. Khi đó ta đánh giá được:

$$\frac{a}{a^2 + b^2} + \frac{b}{b^2 + c^2} + \frac{c}{c^2 + a^2} \leq \frac{a}{2ab} + \frac{b}{2bc} + \frac{c}{2ca} \leq \frac{1}{2}(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}).$$

Từ đó ta tìm được lời giải như sau:

Bài giải.

Theo bất đẳng thức AM-GM ta có:

$$a^2+b^2 \geq 2ab, b^2+c^2 \geq 2bc, c^2+a^2 \geq 2ca$$
$$\Leftrightarrow \frac{a}{a^2+b^2}+\frac{b}{b^2+c^2}+\frac{c}{c^2+a^2} \leq \frac{a}{2ab}+\frac{b}{2bc}+\frac{c}{2ca}$$
$$\Leftrightarrow \frac{a}{a^2+b^2}+\frac{b}{b^2+c^2}+\frac{c}{c^2+a^2} \leq \frac{1}{2}(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}).$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$

Khi đó:

$$P \leq \frac{1}{2}(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c})+\sqrt{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}}$$

Đặt $f(t)=\dfrac{t}{2}+\sqrt{t}$

Ta tìm điều kiện của biến t:

Vì $a,b,c \geq 1$ nên $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c} \leq 3$, do đó $0<t \leq 3$.

Vì $t \leq 3$ nên $\dfrac{t}{2} \leq \dfrac{3}{2}$ và $\sqrt{t} \leq \sqrt{3}$

Suy ra $\dfrac{t}{2}+\sqrt{t} \leq \dfrac{3}{2}+\sqrt{3}$ hay $f(t) \leq \dfrac{3}{2}+\sqrt{3}$

Vậy $P \leq \dfrac{3}{2}+\sqrt{3}$.

Đẳng thức xảy ra khi $a=b=c=1$.

Vậy giá trị lớn nhất của P là $\dfrac{3}{2}+\sqrt{3}$ tại $a=b=c=1$.

Ví dụ 1.5 (xem [3])**.** Cho các số thực a, b, c thỏa mãn $c>0, a \geq c, b \geq c$.

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức:

$$P=\sqrt{c(a-c)}+\sqrt{c(b-c)}-2a^2b^2.$$

Bài giải.

Ta có

$$\sqrt{c(a-c)}+\sqrt{c(b-c)}=\sqrt{ab}\left(\sqrt{\frac{c}{b}\left(1-\frac{c}{a}\right)}+\sqrt{\frac{c}{a}\left(1-\frac{c}{b}\right)}\right).$$

Theo bất đẳng thức AM-GM cho hai số ta có:

$$\sqrt{\frac{c}{b}\left(1-\frac{c}{a}\right)}+\sqrt{\frac{c}{a}\left(1-\frac{c}{b}\right)} \leq \frac{1}{2}\left(\frac{c}{b}+\left(1-\frac{c}{a}\right)\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{c}{a}+\left(1-\frac{c}{b}\right)\right)$$

$$= 1$$

Suy ra $\sqrt{c(a-c)} + \sqrt{c(b-c)} \leq \sqrt{ab}$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi:

$$\begin{cases} \dfrac{c}{b} = 1 - \dfrac{c}{a} \\ \dfrac{c}{a} = 1 - \dfrac{c}{b} \end{cases} \Leftrightarrow \frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{c}.$$

Vậy $P \leq \sqrt{ab} - 2a^2b^2$.

Đặt a.b = t ta đi xét hàm số $f(t) = \sqrt{t} - 2t^2, t > 0$. Ta có $P \leq f(ab)$

Vì $f'(t) = \dfrac{1}{2}\sqrt{t} - 4t = 0 \Leftrightarrow t = \dfrac{1}{4}$.

Lập bảng biến thiên ta dễ dàng thấy $f(t) \leq \dfrac{3}{8}, \forall t \in (0; +\infty)$ suy ra

$$P \leq f(ab) \leq \frac{3}{8}$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi

$$\begin{cases} ab = \dfrac{1}{4} \\ \dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} = \dfrac{1}{c} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \frac{a+b}{ab} = \frac{1}{c}$$

$$\Leftrightarrow c = \frac{1}{4(a+b)}$$

$$\Leftrightarrow a = t, b = \frac{1}{4t}, c = \frac{1}{4t^2+1}, \forall t \in R^+.$$

Vậy giá trị lớn nhất của P là $\dfrac{3}{8}$ tại $a = t, b = \dfrac{1}{4t}, c = \dfrac{1}{4t^2+1}$, trong đó t là một số thực dương bất kỳ.

Với cách suy luận tương tự nhờ áp dụng bất đẳng thức AM-GM ta cũng giải được bài toán tương tự:

Ví dụ 1.6 (xem [3])**.** Cho các số thực x, y thỏa mãn $x + y > 0$. Tìm giá trị nhỏ nhất của

$$P = 2(x^3 + y^3) - 3\sqrt{x+y}.$$